Revue d'histoire des sciences

Le langage formulaire dans la géométrie grecque.

Mme Germaine Aujac

Abstract

SUMMARY. — The treatises written by Autolycus of Pitane, Euclid and Theodosius of Bithynia, when put side by side and closely analysed, show a remarkable similarity in the formalized style of presentation of the theorems. This feature suggests that long before these authors, whose works are the oldest preserved, Greek mathematicians had established strict methods and had adopted a formulaic language which was to secure lasting stability to Greek geometry.

Résumé

RÉSUMÉ. — L'analyse comparée des traités d'Autolycos de Pitane, d'Euclide et de Théodose de Bithynie montre une remarquable permanence dans la formulation des théorèmes. C'est la preuve que, bien avant l'intervention des auteurs qui en sont pour nous les premiers témoins, la géométrie grecque avait établi une méthode stricte et adopté un langage formulaire qui devait en assurer la stabilité pour des siècles.

Citer ce document / Cite this document :

Aujac Germaine. Le langage formulaire dans la géométrie grecque.. In: Revue d'histoire des sciences, tome 37, n°2, 1984. pp. 97-109;

doi : https://doi.org/10.3406/rhs.1984.1995

https://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1984_num_37_2_1995

Le langage formulaire dans la géométrie grecque

RÉSUMÉ. — L'analyse comparée des traités d'Autolycos de Pitane, d'Euclide et de Théodose de Bithynie montre une remarquable permanence dans la formulation des théorèmes. C'est la preuve que, bien avant l'intervention des auteurs qui en sont pour nous les premiers témoins, la géométrie grecque avait établi une méthode stricte et adopté un langage formulaire qui devait en assurer la stabilité pour des siècles.

SUMMARY. — The treatises written by Autolycus of Pitane, Euclid and Theodosius of Bithynia, when put side by side and closely analysed, show a remarkable similarity in the formalized style of presentation of the theorems. This feature suggests that long before these authors, whose works are the oldest preserved, Greek mathematicians had established strict methods and had adopted a formulaic language which was to secure lasting stability to Greek geometry.

Les premiers témoins conservés de l'activité géométrique en Grèce ancienne, les traités d'Autolycos et d'Euclide, permettent de mesurer le degré d'élaboration atteint par cette science, déjà lourde d'un long passé. On y constate que la structure et les diverses phases du raisonnement sont déjà solidement fixées, qu'un nombre important de théorèmes est déjà couramment utilisé, que l'énoncé des théorèmes est coulé dans une forme rigide qui se transmet souvent sans aucun changement d'un siècle à l'autre. C'est cette dernière particularité que je voudrais mettre en lumière ici par l'étude de *La Sphère en mouvement* d'Autolycos.

Autolycos est né vers 360 av. J.-C. à Pitané, petit port d'Eolide face à l'île de Lesbos. Il y fut professeur de mathématiques et y eut pour élève, vers la fin de sa vie, Arcésilas son compatriote qui devait prendre plus tard la direction de l'Académie et qui, avant son départ pour Athènes, accompagna son vieux maître à Sardes. C'est à peu près tout ce que nous savons sur la biographie d'Autolycos. Quant à son œuvre, elle est connue par les deux traités de géométrie sphérique heureusement conservés : *La Sphère en mouve-*

ment, et *Levers et couchers héliaques* (1), et aussi par les critiques formulées à l'encontre de l'hypothèse des sphères homocentriques d'Eudoxe de Cnide : Autolycos était donc orienté essentiellement vers les études astronomiques. Vint-il à Athènes ? On l'ignore. Rencontra-t-il Euclide qui devait être d'une trentaine d'années son cadet ? Rien ne le prouve ; et même il semble probable que les deux hommes dont l'un travaillait en Eolide et l'autre à Alexandrie ne se soient pas directement connus (2). Mais ils étaient tous deux géomètres, et ont tous deux largement puisé dans le fonds déjà riche de la géométrie grecque.

I. — AUTOLYCOS ET EUCLIDE

Sans doute les projets de l'un et de l'autre sont-ils *a priori* différents. Dans les *Eléments*, Euclide (3) rassemblait la somme de toutes les acquisitions des Grecs en matière de géométrie plane, d'arithmétique, de stéréométrie ; il s'adressait à des lecteurs auxquels il voulait présenter un enseignement complet et fournir le moyen à la fois de s'initier à la géométrie et d'aller aussi loin que possible dans cette science. Autolycos, trente ans plus tôt, mettait en forme le dernier état de la question, et faisait part de ses recherches personnelles, dans le domaine de l'astronomie sphérique ; il écrivait pour des étudiants déjà avancés ; aussi se dispensait-il de formuler définitions ou axiomes, et s'appuyait-il dans ses démonstra-

(1) Cf. J. Mogenet, *Autolycos de Pitane, Histoire du texte suivie de l'édition critique*, Louvain, 1950 ; plus récemment, Autolycos de Pitane, *La Sphère en mouvement, Levers et couchers héliaques, Testimonia*, éd. et trad. G. Aujac, avec la coll. de J.-P. Brunet et R. Nadal, Paris, Les Belles Lettres, 1979. C'est à cette édition que je ferai référence, par pages et lignes, le cas échéant. Je précise que je prends pour hypothèse, nécessaire mais contestable, que le texte que nous livrent les manuscrits (dont le plus ancien ne remonte pas au-delà du xe siècle) est celui-là même qu'ont voulu les auteurs grecs.

(2) Ce point est présenté comme une simple probabilité. Il n'est pas impossible, en une époque où les voyages étaient fréquents, que les deux savants se soient rencontrés quelque part dans le bassin méditerranéen, à Athènes peut-être. Nous sommes encore plus ignorants sur la biographie d'Euclide que sur celle d'Autolycos pour laquelle nous disposons au moins du témoignage de Diogène Laerce (*Vie des philosophes illustres*, IV, 29).

(3) L'œuvre d'Euclide a été éditée avec version latine par J. L. Heiberg et H. Menge, *Opera omnia*, 8 vol., Leipzig, 1883-1916 ; cette édition a été reproduite, sans la version latine, par E. Stamatis, Leipzig, 1969-1973. Le texte des *Eléments*, assorti d'une traduction française libre, a été publié par G.-J. Kayas, Paris, 1978. On date généralement de 300 av. J.-C. la rédaction des *Eléments* par Euclide, et de 330 av. J.-C. celle de *La Sphère en mouvement*.

tions sur des théorèmes déjà démontrés. L'examen des définitions implicites et des théorèmes supposés acquis est révélateur de ce fonds commun de connaissances dans lequel puisaient Autolycos et Euclide.

Dès la première démonstration (Prop. I, p. 43, l. 14), Autolycos utilise, en vue de montrer que tous les points à la surface d'une sphère qui tourne autour de son axe décrivent des cercles parallèles dont le plan est perpendiculaire à l'axe, la rotation d'un demi-cercle ABC autour de son diamètre AB ; il dit : ἐὰν δὴ μενούσης τῆς AB εὐθείας περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι... (4). La formule est simple, dira-t-on, et ne mérite aucunement de retenir l'attention ! Voire ! N'est-il pas étrange que cette phrase se retrouve textuellement, au livre XI des *Eléments* d'Euclide, comme définition de la sphère ? Σφαῖρά ἐστιν ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι (5), déclare Euclide définissant la sphère (déf. 14) ; et cette définition est d'autant plus étrange que, dans le livre XI et les suivants, Euclide ne traite que de stéréométrie, sans jamais faire intervenir le mouvement de la sphère, et qu'aucune analogie ne rapproche cette définition de la sphère de la définition qu'il donnait du cercle au livre I.

Assurément, dans ce cas précis, il n'y a pas emprunt d'Euclide à Autolycos, ni d'Autolycos à Euclide, mais simplement emprunt de l'un et l'autre au stock commun des définitions et théorèmes, déjà habillés de formules fixes ; la coïncidence terme à terme prouve l'existence de ces définitions stéréotypées, faciles à mémoriser. Une remarque en passant : la définition de la sphère donnée par Euclide, si étrangère au projet général de son traité (elle est même suivie de la définition de l'axe, autour duquel la sphère tourne !), illustre parfaitement les propos de Socrate qui, dans la *République* (VII, 528 *d*), se plaignait de ce que, à la géométrie science des surfaces, succède dans l'enseignement traditionnel l'astronomie ou « mouvement des solides », sans passer par l'intermédiaire normal de la stéréométrie ou étude des solides immobiles ; Euclide, voulant combler ce vide, n'en emprunte pas moins à

(4) « Si, la droite AB restant immobile, le demi-cercle tourne et revient à sa position initiale... » (*Sphère*, I). Il vient d'être question du demi-cercle ACB.

(5) « On a une sphère quand, le diamètre d'un demi-cercle restant immobile, le demi-cercle tourne et revient à sa position initiale » (*El.*, XI, déf. 14).

l'astronomie, par habitude sans doute, sa définition de la sphère.

En ce qui concerne le libellé des théorèmes, on constate également maintes coïncidences entre l'énoncé fourni par Autolycos et celui proposé par Euclide. Par exemple, à la proposition VII, Autolycos utilise pour sa démonstration le théorème (p. 57, l. 15) : ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ ΓΔ ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ ΗΖΘ τέμνηται, αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν τομαὶ αἱ ΚΜ ΛΝ εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν... (6), que l'on trouve formulé exactement dans les mêmes termes (à une inversion près) chez Euclide, XI, 16 : ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν (7).

De même, à la proposition VIII (p. 59, l. 8), Autolycos termine un raisonnement par l'absurde par l'expression : δύο κύκλοι τεμοῦσιν ἀλλήλους κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο (8), qui évoque directement dans l'esprit du lecteur le théorème bien connu qu'Euclide énonce en III, 10 : κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο (9). De telles coïncidences ne sont pas fortuites ; elles impliquent le recours de l'un et l'autre auteur à des sources communes, solides, et parvenues à leur état définitif.

Dans d'autres cas pourtant, on constate un certain flottement dans les formulations, l'emploi par exemple de ὀρθός chez Autolycos, πρὸς ὀρθάς chez Euclide, dans des théorèmes dont l'énoncé est au demeurant très voisin (*Sphère*, VII, p. 57, l. 5-7 ; *El.*, XI, 19). Mais, dans l'ensemble, les coïncidences sont frappantes.

S'il est vrai que le traité d'Autolycos est antérieur d'une trentaine d'années à la rédaction des *Eléments*, ce qui est l'opinion la plus commune, tout emprunt d'Autolycos à Euclide est exclu par là même. Mais pourrait-on admettre des emprunts d'Euclide à Autolycos, non pas dans les *Eléments* assurément, mais dans un autre traité moins connu, *Les Phénomènes* (10), dont le sujet s'appa-

(6) « Puisque deux plans parallèles AB et CD sont coupés par un plan quelconque HZF, leurs sections communes, ici les droites KM et LN, sont parallèles » (*Sphère*, VII).

(7) « Si deux plans parallèles sont coupés par un plan quelconque, leurs sections communes sont parallèles » (*El.*, XI, 16).

(8) « Deux cercles se couperont en plus de deux points, ce qui est absurde » (*Sphère*, VIII).

(9) « Un cercle ne peut couper un autre cercle en plus de deux points » (*El.*, III, 10).

(10) Pour les *Phénomènes* d'Euclide, édités par H. Menge dans Euclide, *Opera omnia*, Leipzig, 1916, il existe une édition et traduction récente de P. Chiron, Toulouse, 1981 (thèse de IIIe cycle, exemplaires dactylographiés).

rente fort à *La Sphère en mouvement* ? Euclide y traite d'astronomie sphérique et s'appuie sur quelques-uns des théorèmes démontrés par Autolycos. Dans la proposition II, il énonce : Ἐν μιᾷ περιφορᾷ, ὁ μὲν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας κύκλος δίς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος... (11), et se contente de démontrer le second point, puisque le premier, dit-il, a déjà été démontré (δέδεικται). Fait-il allusion à la démonstration donnée par Autolycos pour la proposition X, ainsi libellée : Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τὸν ἄξονα ὁρίζῃ τό τε φανερὸν τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἀφανές, ὁ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας κύκλος ἐν μιᾷ περιφορᾷ τῆς σφαίρας δίς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα (12) ? C'est possible, encore que le théorème en question ne soit probablement pas une découverte d'Autolycos. Il est à remarquer en tout cas que, à une inversion près, l'énoncé est identique.

L'énoncé est différent en revanche dans la proposition VII des *Phénomènes*, où Euclide utilise un théorème démontré par Autolycos (*Sphère*, XI). Euclide dit : ὁ τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα τὸν τόπον τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν κύκλων ἀνατέλλει τε καὶ δύνει (13), se contentant, en guise de démonstration d'un φανερόν (« c'est clair »), par référence peut-être à la démonstration qu'avait donnée Autolycos de ce théorème. Mais, comme d'ailleurs dans le cas précédent, Autolycos avait formulé l'énoncé (*Sphère*, XI, p. 64) en un langage beaucoup plus géométrique : Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τὸν ἄξονα ὁρίζῃ τό τε φανερὸν τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἀφανές, ἄλλος δέ τις λοξὸς μέγιστος κύκλος μειζόνων ἅπτηται ἢ ὧν ὁ ὁρίζων ἅπτεται, κατὰ πᾶσαν τὴν τοῦ ὁρίζοντος περιφέρειαν τὴν μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ὧν ἐφάπτεται τάς τε ἀνατολὰς καὶ τὰς δύσεις ποιεῖται (14).

(11) « A chaque rotation de la sphère, tout cercle qui passe par les pôles de la sphère sera deux fois perpendiculaire à l'horizon, et le zodiaque... » (*Phén.*, II).

(12) « Si dans une sphère un grand cercle oblique sur l'axe sépare la partie visible de la sphère de sa partie invisible, tout cercle qui passe par les pôles de la sphère, à chaque rotation de la sphère, sera deux fois perpendiculaire à l'horizon » (*Sphère*, X).

(13) « Le cercle du zodiaque se lève et se couche sur tout le secteur d'horizon compris entre les tropiques » (*Phén.*, VII).

(14) « Si dans une sphère un grand cercle oblique sur l'axe sépare la partie visible de la sphère de sa partie invisible, et si un autre grand cercle oblique est tangent à des cercles parallèles plus grands que ceux auxquels l'horizon est tangent, ce cercle oblique fait ses levers et ses couchers sur tout l'arc d'horizon compris entre les cercles parallèles auxquels il est tangent » (*Sphère*, XI).

II. — AUTOLYCOS ET THÉODOSE

Autolycos et Euclide sont quasiment des contemporains ; rien d'étonnant sans doute qu'ils aient appris les mêmes théorèmes de géométrie, déjà fixés dans un style formulaire. Or l'expérience prouve que, deux siècles plus tard, les théorèmes ont rarement varié dans leur énoncé et que les mêmes formules restent utilisées. Nous avons en effet à notre disposition, pour illustrer ce point, un traité de *Sphériques* dont l'auteur, Théodose de Bithynie, a vécu dans cette province au Iᵉʳ siècle av. J.-C. ; ce traité, qui se trouve exactement avant *La Sphère en mouvement* dans la collection connue sous le nom de *Petite Astronomie* (15), est à la géométrie de la sphère ce que les *Eléments* sont à la géométrie plane ou à la stéréométrie. Théodose y étudie les propriétés de la sphère immobile, coupée par des cercles variés. C'est sur un corpus de *Sphériques* analogue à celui rassemblé par Théodose qu'Autolycos a appuyé ses démonstrations. Or les théorèmes énoncés par Théodose sont souvent libellés dans les mêmes termes exactement que ceux évoqués par Autolycos. Remarque curieuse d'ailleurs : la définition de la sphère donnée par Théodose est très précisément celle que l'on aurait attendue d'Euclide, tant elle s'apparente à la définition du cercle proposée dans les *Eléments*. La voici (*Sphériques*, I, déf. 1) : Σφαῖρά ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν (16).

Mais revenons à l'énoncé des théorèmes. A la proposition I

(15) Cette collection d'écrits astronomiques, nommée ainsi par Pappus (*Collection mathématique*, l. VI), comprend, dans l'ordre du *Vatic. gr.* 204, les *Sphériques* (en 3 livres) de Théodose, *La Sphère en mouvement* d'Autolycos, l'*Optique* et les *Phénomènes* d'Euclide, les *Lieux géographiques* et *Les nuits et les jours* (en 2 livres) de Théodose, *Dimensions et distances du Soleil et de la Lune* d'Aristarque de Samos, les *Levers et couchers héliaques* d'Autolycos, l'*Anaphoricos* d'Hypsiclès. Les *Sphériques*, édités par J. L. Heiberg, Berlin, 1927, ont été traduits en français par P. Ver Eecke, Paris, 1926.

(16) « La sphère est une figure solide limitée par une surface unique telle que toutes les droites issues d'un même point situé à l'intérieur de la figure qui la rencontrent sont égales entre elles » (*Sphériques*, I, déf. 1). Euclide définissait le cercle comme « une figure plane, limitée par une ligne unique, telle que toutes les droites issues d'un même point situé à l'intérieur de la figure qui la rencontrent sont égales entre elles » (*El.*, I, déf. 15).

(p. 44, l. 15), Autolycos utilise au cours de la démonstration la propriété suivante : οἱ δὲ περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες ἐν σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοί εἰσι (17), que l'on trouve énoncée dans les mêmes termes au théorème II, 2 des *Sphériques* : οἱ περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες ἐν σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοί εἰσι. La ressemblance est moins frappante, mais existe à coup sûr, pour un autre théorème utilisé par Autolycos dans la même proposition (p. 44, l. 8) : καὶ φανερὸν ὅτι τὰ ΑΒ σημεῖα πόλοι ἔσονται τοῦ γραφέντος κύκλου ἐπειδήπερ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἦκται καὶ ἐκβέβληται ἡ ΑΒ ἕως τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (18), théorème que l'on trouve libellé pareillement chez Théodose (*Sphériques*, I, 8), au temps des verbes près : ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ καὶ ἐκβληθῇ ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη, ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου (19).

De même, à la proposition II, Autolycos applique un théorème que l'on trouve énoncé par Théodose en II, 10. Voici le texte d'Autolycos (p. 45, l. 12) : ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν οἱ ΓΕ ΑΖ καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γεγραμμένοι εἰσὶν οἱ ΑΓΔΒ ΑΕΖΒ, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ περιφέρεια τῇ ΑΖ περιφερείᾳ (20) ; et voici celui de Théodose, très voisin : ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὅμοιαί εἰσιν, αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειας αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσίν (21). Seule la première partie de l'énoncé sert à Autolycos.

Même chose à peu près pour la proposition VI, où Autolycos

(17) « Or les cercles qui, dans une sphère, ont les mêmes pôles sont des cercles parallèles » (*Sphère*, I). Le libellé du théorème des *Sphériques* (II, 2) est identique, à la suppression près de la particule « or ».

(18) « Il est clair que les points A et B seront les pôles du cercle ainsi décrit puisque, du centre de la sphère, une perpendiculaire AB a été menée et prolongée jusqu'à la surface de la sphère » (*Sphère*, I).

(19) « Si l'on a un cercle dans une sphère et que, du centre de la sphère, une perpendiculaire soit menée sur ce cercle et prolongée de chaque côté, ladite perpendiculaire passera par les pôles du cercle » (*Sphériques*, I, 8).

(20) « Puisque dans une sphère on a des cercles parallèles CE et DZ, et que l'on a décrit des grands cercles ACDB et AEZB qui passent par les pôles des premiers, l'arc CE est semblable à l'arc DZ » (*Sphère*, II).

(21) « Si l'on a dans une sphère des cercles parallèles, et que l'on décrive des grands cercles qui passent par les pôles des premiers, les arcs des cercles parallèles compris entre les grands cercles sont semblables, et les arcs des grands cercles compris entre les cercles parallèles sont égaux » (*Sphériques*, II, 10).

(p. 52, l. 9) énonce un théorème que l'on trouve aussi chez Théodose (II, 8) sous forme presque identique ; ou bien pour la proposition VIII, où Autolycos (p. 58, l. 14) utilise le théorème énoncé pratiquement sous la même forme par Théodose (II, 13) ; ou encore pour la proposition X, où Autolycos (p. 62, l. 14) applique à sa démonstration la conclusion du théorème que l'on trouve chez Théodose en II, 5 ; ou également pour la proposition XII où Autolycos utilise d'abord (p. 65, l. 14) le théorème formulé en I, 12 par Théodose, puis (p. 67, l. 8) celui formulé en I, 7. La reprise des mêmes termes montre à quel point était forte, dans le langage mathématique, l'emprise du style formulaire.

Un exemple typique et particulièrement significatif en est donné par l'utilisation que fait Autolycos, à plusieurs reprises, du théorème que Théodose présente en I, 15 : ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων τέμνῃ, δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμεῖ (22). Le théorème énonce les deux propriétés de deux grands cercles qui se coupent quand l'un des deux est un des cercles parallèles et l'autre un grand cercle passant par les pôles (un méridien) : ils se coupent en deux parties égales et à angles droits ; la locution de coordination τε ... καί souligne que ces deux propriétés sont conjointes. Autolycos utilise ce théorème cinq fois au cours de son traité. A la proposition VI (p. 53, l. 14) et à la proposition VII (p. 55, l. 15), il reproduit *in extenso* le théorème, exactement dans les mêmes termes que Théodose. Ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΔΓ (VI, ὁ ΗΖΘ VII) κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΒΓ (VI, τὸν ΑΒΓΔ VII) διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς (23), dit Autolycos, avec pour seule variante (qui a son importance) le déplacement du verbe principal. Jusque-là, rien que de très normal. Mais voilà qu'à la proposition V Autolycos n'avait besoin pour sa démonstration que de la première propriété ; entraîné par l'habitude créée par l'usage du langage formulaire, il écrit textuellement (p. 51, l. 12) : καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος τὸν ΒΔΓΕ

(22) « Si dans une sphère un grand cercle coupe un cercle quelconque de la sphère en passant par ses pôles, il le coupera en deux parties égales et à angles droits » (*Sphériques*, I, 15).

(23) « Puisque dans une sphère un grand cercle ADC (VI, HZF VII) coupe un cercle quelconque de la sphère ABC (VI, ABCD VII) en passant par ses pôles, il le coupera en deux parties égales et à angles droits » (*Sphère*, VI et VII).

κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτόν τεμεῖ (24), conservant dans son intégralité la première partie de la phrase principale, y compris le premier terme, bien inutile, de la locution de coordination. Cet exemple n'est pas unique en son genre. A la proposition VII (p. 57, l. 1), où Autolycos ne veut se servir que de la seconde propriété, il écrit : ἐπεὶ ὁ ΗΖΘ κύκλος τοὺς ΑΒ, ΓΔ, ΑΒΔΓ κύκλους διὰ τῶν πόλων τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τεμεῖ (25), où le καὶ pourrait à la rigueur être interprété comme une particule intensive si le précédent de la proposition V ne nous incitait à y voir simplement l'écho du théorème complet. Quand pour la cinquième fois, à la proposition X (p. 62, l. 15), Autolycos veut utiliser la première partie du théorème, il se contente d'en donner l'application sans énoncer entièrement le théorème, jugé sans doute trop connu.

Je ne saurais cependant passer sous silence les exemples qui semblent en contradiction avec la thèse que je soutiens. Dans les propositions I et II, Autolycos utilise la propriété que si une sphère est coupée par un plan le résultat à la surface de la sphère est un cercle ; dans ces occasions (p. 43, l. 13 et p. 45, l. 7), il se sert de la formule ποιήσει δὴ τομὴν κύκλον (prop. I), variée en ποιήσει δὴ τομὴν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον (prop. II) ; Théodose, lui, propose un énoncé beaucoup plus élaboré (I, 1) : ἡ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστι (26). Il est probable qu'à la formule simple, courante à l'époque d'Autolycos, a été substituée celle beaucoup plus précise que l'on trouve chez Théodose.

Dans les propositions VI et VII, Autolycos utilise, dans un libellé identique les deux fois, un théorème assez élaboré que Théodose énonce en III, 1 sous une forme largement différente. Autolycos dit en effet, à la proposition VI (p. 54, l. 3) : κύκλου δή τινος τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΑΓ τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐφέστηκεν

(24) « Puisque le cercle ABC coupe le cercle BDCE en passant par ses pôles, il le coupera en deux parties égales » (*Sphère*, V). Pour reproduire en français l'incongruité de la phrase grecque, on aurait pu traduire dans les cas précédents : « Il le coupera à la fois en deux parties égales et à angles droits » et mettre ici : « Il le coupera à la fois en deux parties égales » ; mais ce serait user d'un marteau-pilon pour écraser une mouche.

(25) « Puisque le cercle HZF coupe les cercles AB, CD, ABCD en passant par leurs pôles, il les coupera à angles droits » (*Sphère*, VII). Dans la formulation proposée à la note précédente, il faudrait ici traduire : « Il les coupera et à angles droits. »

(26) « Il aura comme section un cercle » (*Sphère*, I) ; « Il aura comme section sur la sphère un cercle » (*Sphère*, II). Théodose dit : « La ligne à la surface de la sphère est une circonférence de cercle » (*Sphériques*, I, 1).

τὸ ΑΔΓ, καὶ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα τέμνεται κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔστιν ἐλάσσων ἡ ΔΑ, τοῦτο γὰρ φανερόν, ἡ ἄρα ΔΑ εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν (27). Le même libellé exactement se retrouve à la proposition VII (p. 55, l. 19), à ceci près que les lettres correspondant à la figure sont différentes, que τέτμηται est substitué à τέμνεται et que le τοῦτο γὰρ φανερόν est remplacé par ἢ ἡμίσεια (28), variante qui fait problème.

Face à cette rédaction du théorème, dont la répétition même fait penser qu'elle était la rédaction officielle du temps d'Autolycos, Théodose présente (*Sphériques*, III, 1) un énoncé plus complet et passablement différent : ἐὰν εἰς κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ ἐπ' αὐτῆς τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐπισταθῇ μὴ μεῖζον ἡμικυκλίου, διαιρεθῇ δὲ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα, ἡ ὑπὸ τὴν ἐλάσσονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν μείζονα περιφέρειαν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. Ἐὰν δὲ ἡ διαχθεῖσα διάμετρος ᾖ τοῦ κύκλου, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ, ἐλάσσων μὲν ἔσται ἡ προειρημένη εὐθεῖα πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη δὲ ἡ ὑπὸ τὴν μείζονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα (29). Théodose en effet considère d'abord toute droite coupant le cercle, puis le cas particulier du diamètre ; Autolycos au contraire ne faisait

(27) « Or sur le diamètre AC d'un cercle quelconque ABC, on a dressé à angle droit un segment de cercle ADC, et l'arc du segment dressé est coupé en parties inégales par le point D, l'arc DA étant plus petit (ceci est évident) ; donc la droite DA est la plus petite de toutes les droites qui tombent du point D sur le cercle ABC » (*Sphère*, VI).

(28) Les modifications essentielles portent donc sur le temps d'un verbe (« a été coupé », à la place de « est coupé ») et sur la substitution de « étant plus petit que la moitié » à « étant plus petit (ceci est évident) ». Il est possible dans ce dernier cas, et vu l'identité des contextes, que la variation dans l'énoncé soit due à une intervention extérieure (notes marginales insérées par erreur), au cours de la transmission du texte.

(29) « Si l'on mène dans un cercle une droite coupant ce cercle en parties inégales, si l'on dresse sur cette droite un segment de cercle perpendiculaire inférieur à un demi-cercle et si l'on divise en parties inégales l'arc du segment ainsi dressé, la droite qui sous-tend le plus petit arc est la plus petite de toutes les droites qui tombent d'un même point sur le plus grand arc du cercle considéré au début. Si la droite menée dans le cercle est un diamètre du cercle, toutes choses restant égales par ailleurs, la susdite droite sera plus petite que toutes les droites qui tombent du même point sur la circonférence du cercle considéré au début, et la droite qui sous-tend le plus grand arc sera la plus grande » (*Sphériques*, III, 1). Le comparatif ἐλάσσων dans la seconde phrase devrait probablement être remplacé par le superlatif ἐλαχίστη utilisé par Autolycos, et par Théodose lui-même dans la première partie du théorème.

référence qu'au cas particulier où la droite coupant le cercle est un diamètre. Il est probable que, de son temps, seule la démonstration pour ce cas particulier avait été faite ; c'est plus tard probablement que l'on a appliqué le théorème à toute droite coupant le cercle, d'où la rédaction plus complète chez Théodose de ce même théorème.

***

Ainsi l'analyse de *La Sphère en mouvement* d'Autolycos nous procure la preuve formelle non seulement de l'extension et de l'influence qu'avait prise la géométrie grecque à la fin du ɪvᵉ siècle, mais aussi de l'extrême rigidité d'expression qui caractérisait l'énoncé des théorèmes. Proclus (30) fait remonter à Hippocrate de Chios (c. 470-400 av. J.-C.) la rédaction du premier traité intitulé *Eléments* ; sans doute ce traité a-t-il contribué à fixer définitivement le langage de la géométrie, mais il est fort probable qu'Hippocrate n'a fait que coucher par écrit ce qui vivait déjà depuis quelque temps dans la mémoire des hommes et qui y avait pris une forme quasiment inaltérable.

Comment expliquer alors que, seule parmi les sciences de ce temps, la géométrie ait bénéficié dès l'abord de l'usage d'un langage formulaire qu'on pourrait croire réservé à l'expression poétique dans ses formes les plus anciennes, et tout particulièrement aux poèmes d'Homère si largement diffusés dans le Bassin méditerranéen bien avant leur mise par écrit ? La réponse n'est pas simple, et nous ne pouvons sur ce point qu'émettre des hypothèses plus ou moins plausibles.

Une première explication réside sans aucun doute dans le fait que la transmission du savoir s'est d'abord faite par tradition orale, par recours obligé à la mémoire. L'invention de l'écriture n'est-elle pas considérée par Platon (31) comme néfaste au développe-

(30) Proclus, *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*, Leipzig, éd. Friedlein, 1873, repr. 1967, p. 65 sq.

(31) Platon, *Phèdre*, 274 *c* sq. A Theuth, qui « le premier découvrit la science du nombre avec le calcul, la géométrie et l'astronomie, et aussi le trictrac et les dés, enfin, les caractères de l'écriture », le roi Thamous déclara « cette connaissance ⟨des caractères de l'écriture⟩ aura pour résultat, chez ceux qui l'auront acquise, de rendre leurs âmes oublieuses, parce qu'ils cesseront d'exercer leur mémoire ; mettant en effet leur confiance dans l'écrit, c'est du dehors, grâce à des empreintes étrangères, non du dedans, et grâce à eux-mêmes, qu'ils se remémoreront les choses » (trad. L. Robin).

ment de la science dans la mesure où elle rend la mémoire paresseuse ? Tout Grec, d'Athènes ou d'ailleurs, qui savait par cœur, dès la plus tendre enfance, les longs poèmes de l'*Iliade* et de l'*Odyssée*, retenait facilement aussi sans doute les rudiments de science que lui fournissait l'école, pourvu qu'ils soient exprimés sous une forme fixe. Or cette forme, qui ne dispose pas des ressources du rythme poétique, a besoin, pour être aisément mémorisée, d'une réduction à l'indispensable. Le langage des théorèmes se distingue de la prose littéraire (et aussi de la poésie) en ce que chaque terme de la phrase est à la fois nécessaire et suffisant. C'est ce caractère irréductible de l'énoncé qui assure aux théorèmes de géométrie et la mémorisation et la pérennité.

Une seconde explication réside peut-être dans le caractère tout à fait particulier de la science géométrique. Seule parmi les autres sciences, elle est une construction idéale de l'esprit humain, s'appuyant d'une certaine manière sur le réel, mais pour le transposer en en supprimant toutes les « imperfections ». Un exemple significatif en est fourni par la géométrie sphérique, autre nom de l'astronomie, qui permet de se faire une idée du fonctionnement du *cosmos* : le ciel étoilé devient la sphère des fixes qui tourne à vitesse uniforme autour de son axe ; sur cette sphère on dessine le grand cercle oblique (32) du zodiaque, qui tourne avec la sphère ; tout autour, on peut disposer le grand cercle oblique de l'horizon, immobile celui-là, qui sépare l'hémisphère visible de l'hémisphère invisible. Le géomètre peut alors jouer à loisir avec ces figures imaginées (33), mais, de ce jeu, il tire des conclusions concrètes qui coïncident assez souvent avec la réalité observée. Pour cet édifice purement intellectuel, le langage constitue le support physique indispensable, avec son cortège de définitions, d'axiomes, et, à mesure de leur découverte, de théorèmes. Il importe donc que ce langage soit le plus solide possible, évacuant toute ambiguïté et

(32) Ce grand cercle oblique, qui traverse en son milieu la bande zodiacale, est le cercle de l'écliptique, apparemment parcouru par le Soleil dans sa révolution annuelle ; il est tangent aux deux cercles égaux et parallèles que sont les tropiques. La géométrie sphérique repose sur l'hypothèse que la Terre, au centre de la sphère céleste, est réduite à un point (cf. Euclide, *Phénomènes*, I).

(33) Il peut aussi reconstruire à sa manière le *cosmos* en modèle réduit par la *sphairopoiia*. Cf. G. Aujac, La sphéropée ou la mécanique au service de la découverte du monde, *Revue d'Histoire des Sciences*, XXIII, 1970, p. 93-107, ou encore Sphérique et Sphéropée en Grèce ancienne, *Historia Mathematica*, 3 (1976), p. 441-447.

tout mot inutile, qu'il soit ce noyau dur sans lequel l'édifice s'écroulerait comme un château de cartes.

Mais pour survivre et continuer à monter, il est indispensable qu'un tel édifice soit considéré comme essentiel au développement de l'esprit humain. Or en Grèce, et le fait est magnifiquement illustré par la devise inscrite au fronton de l'Académie : « que nul n'entre ici s'il n'est géomètre », la géométrie a toujours constitué un élément fondamental dans l'enseignement. Et c'est là sans doute une troisième explication de la solidité exceptionnelle de l'œuvre d'un Euclide par exemple, dont les *Eléments* ont formé la base de la géométrie occidentale jusque dans un passé très récent. Si en effet l'enseignement littéraire, fondé sur la poésie d'Homère, était résolument tourné vers un passé révolu, mais, par la formation générale qu'on en recevait, pouvait donner naissance à d'autres formes d'art, et surtout apportait la sagesse, la géométrie apprenait à l'homme à raisonner avec rigueur, et, de raisonnement en raisonnement, lui permettait d'édifier un système cohérent aux développements peut-être infinis. C'est le prestige de la géométrie grecque, le rôle qu'on lui attribuait dans la formation de l'intelligence qui ont assuré sa large diffusion dans le bassin méditerranéen tout entier, diffusion qui n'eut d'égale que celle des poèmes homériques.

La géométrie a été en effet pour la Grèce classique et hellénistique un facteur de culture et de civilisation au moins aussi important que l'*Iliade* et l'*Odyssée* ; et elle le doit en grande partie à l'effort de systématisation accompli par les premiers géomètres, qui les a conduits à découvrir et imposer à tous un langage formulaire aussi contraignant que l'hexamètre épique, et de portée aussi universelle.

Germaine AUJAC.